§ Πεπλεγμένες συναρτήσεις

ΕΡΩΤΗΜΑ ① Δίνεται μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Κάτω από ποιές προϋποθέσεις υπάρχει λύση της εξίσωσης $F(x, y) = 0$ ως προς x ή y; Πόσες τέτοιες λύσεις υπάρχουν και πόσο λείες είναι;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Το παραπάνω πρόβλημα, μπορεί να μην έχει λύση

-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\boxed{x^2+y^2+1=0} = F(x,y)$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να έχει μια λύση και μόνο

-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\boxed{x^2+y^2=0} = F(x,y)$

Μπορούμε να γενικεύσουμε σε ανώτερες διαστάσεις ως εξής

ΕΡΩΤΗΜΑ (2)

Υποθέτουμε ότι $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ είναι διανυσματική συνάρτηση $F=(F_1,\dots,F_m)$. Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$F(x,y)=0$ (2), όπου $X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_m)$

Πότε το σύστημα (2) έχει λύση ως προς Y και αν έχει πόσο είναι η λύση;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το σύστημα είναι $\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$

ΘΕΩΡΗΜΑ [ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ]

Υποθέτουμε ότι το σύστημα $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ είναι μια C^k-τάξεως απεικόνιση με $k \geq 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο (X_0, Y_0) με $F(X_0, Y_0)=0$.

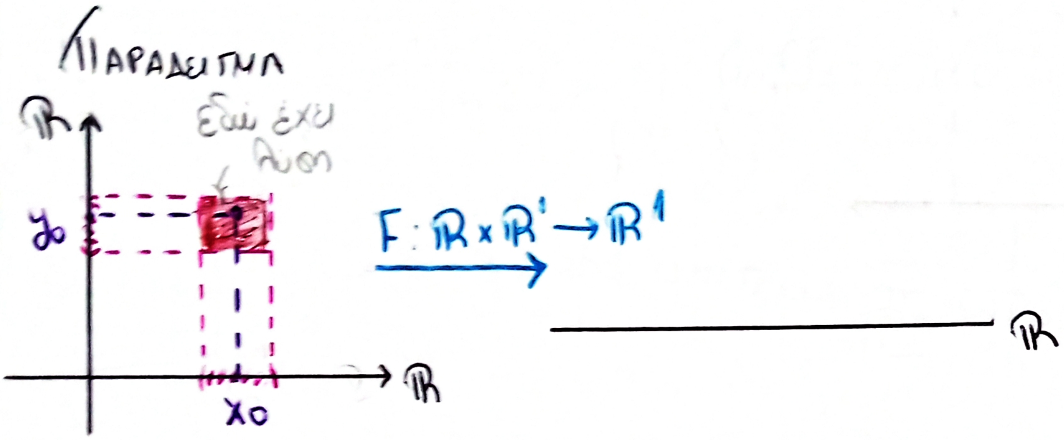
Έστω $M = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(X_0, Y_0)\right)_{1\leq i,j \leq m}$

Εάν $\det M \neq 0$, τότε $\exists$ ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$, το οποίο περιέχει το x_0 και ανοιχτό $B \subseteq \mathbb{R}^m$, το οποίο περιέχει το y_0, ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα:

$\forall x \in A \; \exists$ μοναδικό $g(x) \in B$ με $F(x, g(x)) = 0$.

Επιπλέον, η $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι C^k-τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

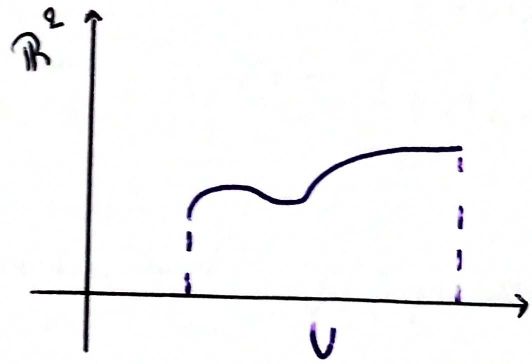


§ ΜΕΓΙΣΤΑ - ΕΛΑΧΙΣΤΑ

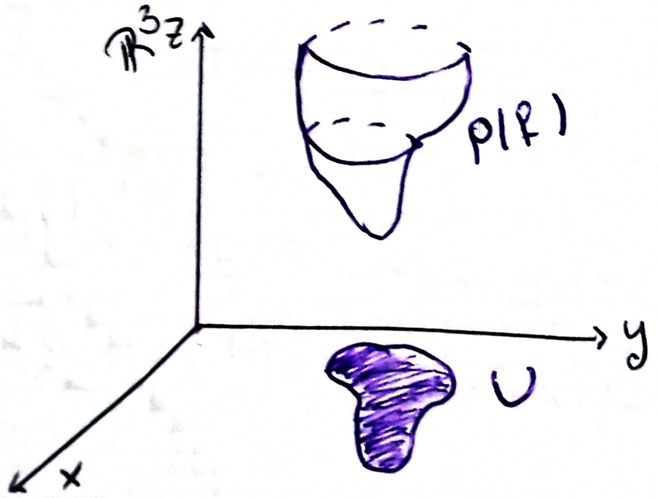
Έστω ότι $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ όπου U ανοικτό του $\mathbb{R}^m$.
Γεωμετρικά μπορούμε να σχεδιάσουμε τέτοιες απεικονίσεις μέσω του γραφήματος της f:

$\rho(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in U\}$

$n = 1$

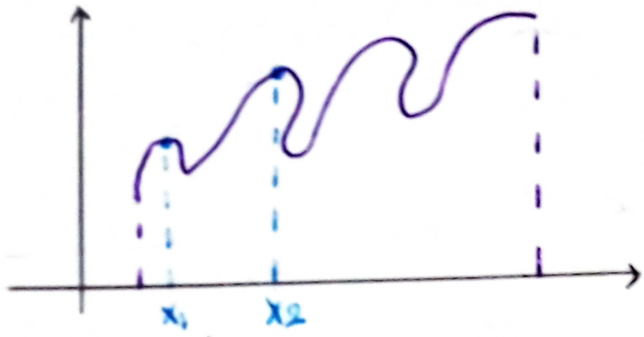


$n = 2$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σημείο $x_0 \in U$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f όταν $\exists\, V \subseteq U$ που περιέχει το x_0 και $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in V$



Αντίστοιχα, ορίζεται το τοπικό ελάχιστο.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Υπάρχει κάποιο απλό κριτήριο για να βρούμε τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα;

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, ορισμένη σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Εάν $p \in U$ είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο $\Rightarrow$

$$\nabla f(p) = (f_{x_1}(p), \ldots, f_{x_n}(p)) = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σημείο $p \in U$ ε.ω. $\nabla f(p) = 0$ λέγεται κρίσιμο σημείο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

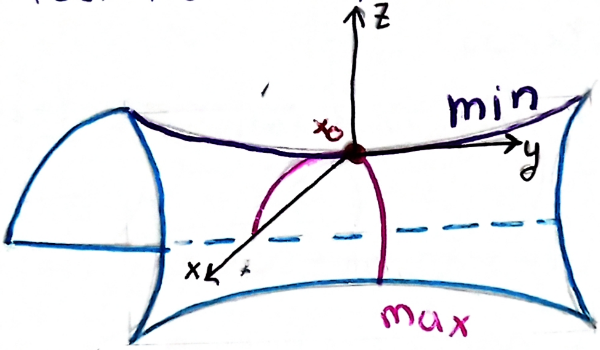
Το αντίστροφο της προηγούμενης ΠΡΟΤΑΣΗΣ δεν ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ως $f(x,y) = xy$.

Εδώ έχουμε $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$

Όμως, το (0,0) δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο



Το x_0 είναι σαγματικό σημείο

$p(f)=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: U\subseteq\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2-τάξεως διαφορίσιμη συνάρτηση, ορισμένη σε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.
Ο πίνακας $\nabla^2 f = Hess\, f = H(f) = H_f$ (Εσσιανός πίνακας)

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Ο λόγος που θέλω C^2 είναι για να αλλάξω θέση στην παραγώγιση. Γενικά, δεν επιτρέπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: U\subseteq\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ μια C^2-τάξεως διαφορίσιμη συνάρτηση, ορισμένη σε ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και P κρίσιμο σημείο της f. Τότε:

α) Εάν ο $H_f(P)$ είναι θετικά ορισμένος (οι ιδιοτιμές του είναι όλες θετικές), τότε η f

παρουσιάζει, στο σημείο ρ, τοπικό ελάχιστο.

β) Αν ο $H_f(\rho)$ είναι αρνητικά ορισμένος (οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές), τότε η f παρουσιάζει, στο σημείο ρ, τοπικό μέγιστο.

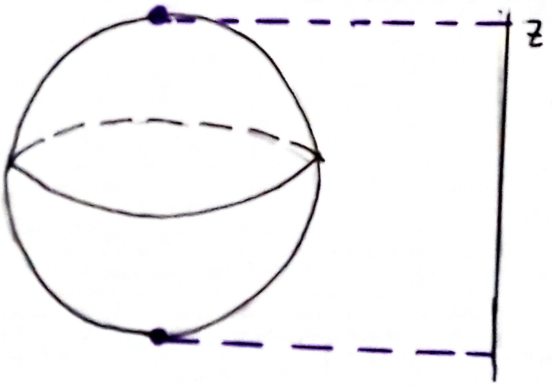
γ) Αν ο $H_f(\rho)$ είναι μη ορισμένος (έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές), τότε η f παρουσιάζει, στο σημείο ρ, σαγματικό.

[* Εάν η ορίζουσα είναι 0, δεν ξέρω τίποτα!]

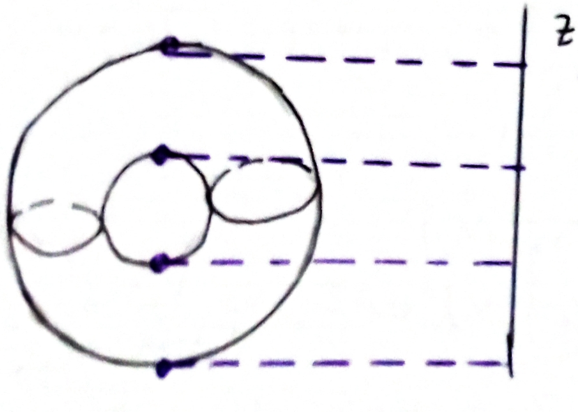
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R(x) \iff$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{(1)} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{(2)} + R(x) \iff$$

min: $f(x)-f(x_0) \geq 0$, βρισκόμαστε σε κρίσιμο σημείο, επομένως ο όρος (1) $\nexists$. Άρα, το πρόσημο της $f(x)-f(x_0)$ εξαρτάται από τη $2^η$ παράγωγο, από τον όρο (2)



Έχει 2 κρίσιμα σημεία, επομένως $\nexists$ "τρύπες"



$\exists$ 4 κρίσιμα σημεία, επομένως $\exists$ μια "τρύπα"

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΠΤΥΓΜΑΤΑ (MANIFOLDS)

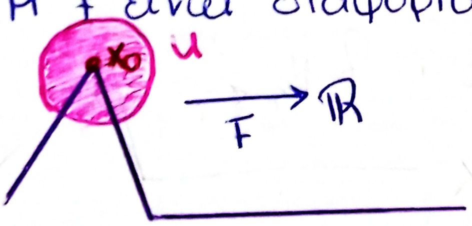
Μέχρι τώρα μελετήσαμε την έννοια της διαφορισιμότητας σε ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει ανάγκη επέκτασης του διαφορικού λογισμού σε μη ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μια απεικόνιση $f: X \to \mathbb{R}^1$, ονομάζεται διαφορίσιμη κ-τάξης (C^k-τάξης), όταν $\forall x \in X$ $\exists$ ανοιχτή περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και διαφορίσιμη $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, ε.ω. $f|_{U\cap X} = F|_{U\cap X}$.

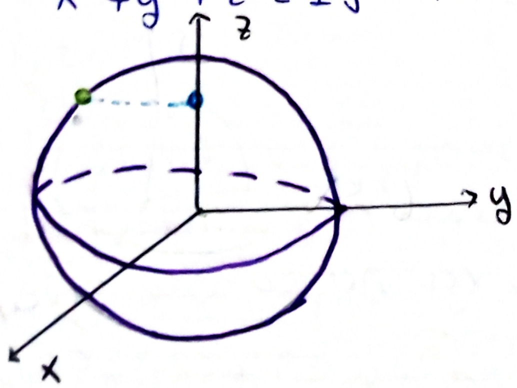
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Η f είναι διαφορίσιμη, αν $\exists$ διαφορίσιμη επέκταση της.

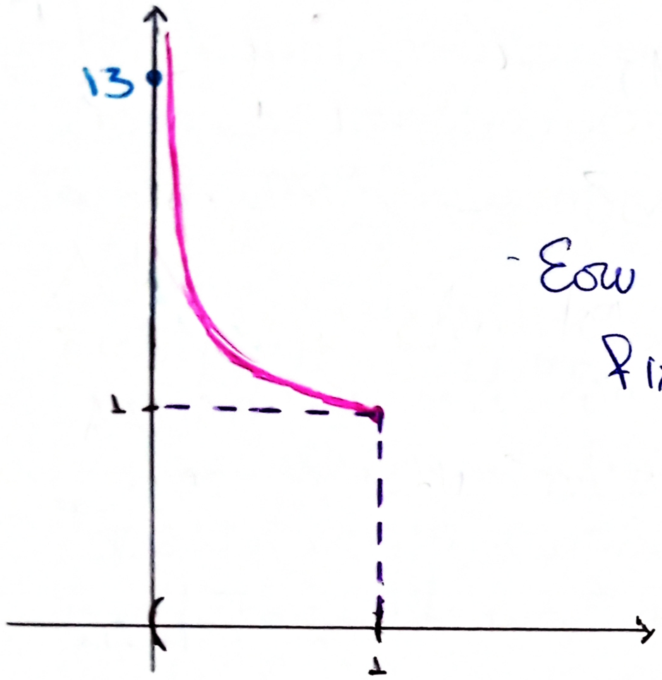


Η f ορίζεται μόνο στο μωβ κομμάτι μέσα στην U.

β) Ως παράδειγμα, ας θεωρήσαμε ως $X = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ και $f: X\to\mathbb{R}$ την $f(x,y,z)=z$



γ) $f(x) = \frac{1}{x}$



- Έστω η επέκταση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 13, & x = 0 \end{cases}$$

Δεν είναι η μοναδική επέκταση.
∃ πολλές!

Η επέκταση που πήρα δεν είναι συνεχής, άρα δεν είναι διαφορίσιμη. Εμάς, μας ενδιαφέρει να είναι και διαφορίσιμη. Αλλά, επειδή οι επεκτάσεις που μπορώ να πάρω δεν είναι διαφορίσιμες, εν τέλη η συνάρτηση μου δεν επεκτείνεται.

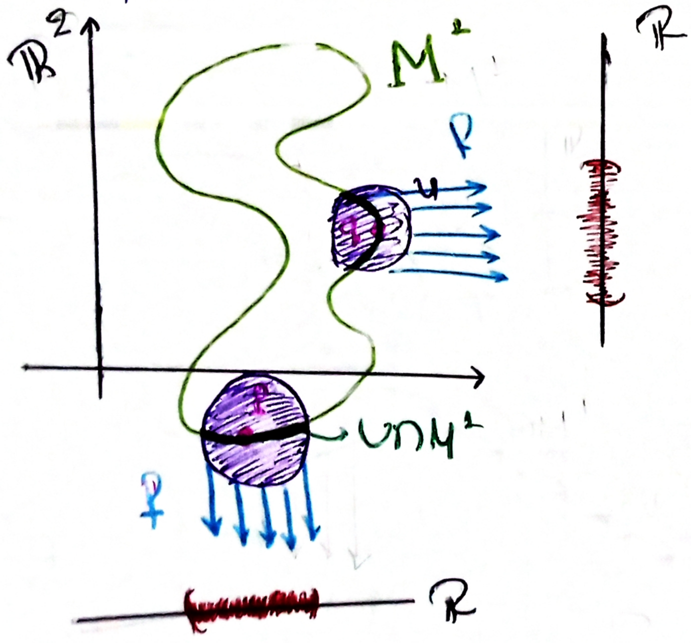
δ) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας πάρουμε ως σύνολο $A=[0,1]$ και $f: A \to \mathbb{R}$ την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. $\nexists$ κανένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γύρω από το $x_0=0$, όπου η f να επεκτείνεται σε διαφορίσιμη συνάρτηση. Ο λόγος είναι ότι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ και $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\infty$

ε) Μέχρι στιγμής δεν έχουμε καμία υπόθεση για το σύνολο X. Το X μπορεί να έχει πολλές τοπολογικές παθογένειες. Οπότε, θα θέλαμε και το X να είναι "λείο".

ΟΡΙΣΜΟΣ

· Ένα υποσύνολο $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ ($m \to$ διάσταση) ονομάζεται (διαφορίσιμη) πολλαπλότητα διάστασης m, εάν συμβαίνει το εξής: Σε κάθε σημείο $p \in M^m$ $\exists$ ανοιχτή περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^k$ τ.ω. το $M^m \cap U$ να είναι διαφορομορφικό* με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. $\exists$ δηλαδή, διαφορίσιμη $f: M^m \cap U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ που έχει διαφορίσιμη αντίστροφη



* 1-1, επί, διαφορίσιμη

Αν την παραπάνω διαδικασία μπορώ να την εφαρμόσω σε κάθε σημείο, τότε είναι πολύπτυγμα?

Το σχήμα είναι συμπαγές, άρα δεν μπορώ να το απεικονίσω στο $\mathbb{R}$ με 1 απεικόνιση. Άρα χρειάζομαι κάθε κομμάτι της καμπύλης μου ξεχωριστά. Για αυτό παίρνω πολλές πτυχές (manifolds). Θέλω κάθε σημείο να το κάνω με λείο τρόπο, κομμάτι του $\mathbb{R}$.